# *Le statistiche*

*Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati*

Scheda **1**

*I consumi e i redditi*



## *0. Le statistiche*

«Chi è il capocannoniere del campionato?», «Settembre 2008: record di precipitazioni», «Sono aumentati gli incidenti stradali», «Qual è la percentuale di italiani che evade le tasse?», «La popolazione italiana invecchia», «Al giovedì il programma serale più seguito dagli italiani è …», «Il Partito … ha guadagnato un punto percentuale rispetto alle precedenti elezioni», «Campionato di rugby: la capoclassifica sta tenendo una media di 39.2 punti per partita» … : ogni giorno sui giornali, alla televisione, nelle discussioni con gli amici, … ci troviamo di fronte a ***statistiche***, cioè alla valutazione dei fenomeni più disparati mediante numeri o rappresentazioni grafiche che ne indicano la frequenza o le dimensioni o l'incidenza o le variazioni nel tempo o …

Si tratta dell'uso della matematica socialmente più diffuso dopo la misura del tempo (lettura dell'orologio, calcolo del tempo trascorso, …) e il calcolo economico (calcolo del costo di un prodotto a partire dal costo unitario, calcolo del resto, …).

E si tratta dell'uso che presso la maggioranza delle persone caratterizza il *ruolo della matematica*: «le cifre non mentono», «i dati parlano da soli» sono dei luoghi comuni assai diffusi che rivelano l'idea che le rappresentazioni matematiche dei fenomeni diano luogo a valutazioni rigorose. Questo pregiudizio è spesso sfruttato da chi vuole convincere gli altri della bontà delle proprie scelte o della convenienza del prodotto che vende o del fatto che le cose in un certo campo vanno bene o vanno male: si "sparano" un po' di percentuali e di grafici, come a dire «le cose stanno così: lo dice la matematica».

«2+2 fa 4» è un fatto matematico che non può essere messo in discussione. Ma, anche se si fanno esattamente i calcoli numerici, non è detto che si siano presi i dati più significativi o che si sia scelto il modello matematico più adeguato per rappresentare il fenomeno da analizzare. I dati statistici vanno letti e *interpretati* per quello che sono, senza trarre conclusioni errate e cercando di valutare criticamente quelle che gli altri ci propongono.

In questa ***unità didattica*** verranno presentati e discussi alcuni dei modelli matematici più utilizzati nelle statistiche diffuse dai mezzi di informazione. Prenderemo in considerazione esempi riferiti a campi diversi, scelti tra quelli di interesse più generale: l'economia delle famiglie (consumi e redditi), lo sport (i record), le caratteristiche fisiche della popolazione (dimensioni e sviluppo del corpo), la scuola (promossi, bocciati, abbandoni, …).

In questa ***prima scheda*** vedremo l'impiego di alcuni strumenti matematici per elaborare statistiche sui *consumi* e sul *reddito* in Italia, con particolare riferimento alle condizioni di vita nel corso del Novecento.

I dati impiegati sono in gran parte tratti dalle pubblicazioni dell'*Istat* (Istituto nazionale di statistica), che raccoglie ed elabora informazioni relative a numerosi aspetti sociali ed economici dell'Italia.

## *1. Rappresentazioni dei numeri*

Nella tabella (1.1) è riportato quanto si è speso in beni di consumo (alimenti, vestiti, automobili, …) e in servizi (taglio dei capelli, viaggi in treno, …) in Italia. I dati si riferiscono ai consumi "finali" (ad esempio viene conteggiato quanto paga per una bibita chi va al bar ma non quanto la bibita è stata pagata dal proprietario del bar). Inoltre sono state escluse le spese fatte da enti "pubblici" (ad esempio i soldi spesi dai Comuni per le divise dei vigili). Per questi motivi i dati riportati nella tabella vengono chiamati *consumi finali interni privati*. Nel seguito spesso li chiameremo più semplicemente ***consumi***.

**(1.1)**

| *anno* | alimentari | tabacco | vestiario | abitazione | trasporti | altro | *totale* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | in milioni di lire | | | | |
| *1926* | 77 749 | 3 226 | 17 659 | 6 849 | 3 420 | 15 302 | *124 205* |
| | | | in milioni di euro | | | | |
| *2010* | 144 291 | 18 461 | 71 352 | 210 285 | 119 857 | 386 256 | *950 502* |

**1** Scrivi *in lettere* i consumi totali del 2010.

**2** Scrivi *in cifre*, esprimendoti in lire invece che in milioni di lire, i consumi totali del 1926.

I dati scritti per esteso sono molto grandi. Per descriverne le dimensioni si usa il termine ***ordine di grandezza***: nel caso di 386256 milioni, ovvero 386256000000, si dice che ha ordine di grandezza *delle centinaia di miliardi*, infatti il "3" sottolineato indica che l'ammontare è composto da 3 volte 100000 milioni, ovvero 3 volte 100 miliardi (e poi da 8 volte 10000 milioni, 6 volte 1000 milioni, …).

```
386 256 000 000
| |   |   |   |_ unità
| |   |   |_____ migliaia
| |   |_________ milioni (migliaia di migliaia)
| |_____________ miliardi (migliaia di milioni)
|_______________ centinaia di miliardi
```

**3** Qual è l'ordine di grandezza di 6 849 000 000?

***Nota 1***. Per rendere più "leggibile" il numero 6849000000 spesso, come abbiamo fatto nel quesito, si scrive 6 849 000 000, separando con degli spazi bianchi le cifre prese a tre a tre a partire dalla cifra delle unità. In questo modo ci è facile leggere il numero come 6 849 000 migliaia o come 6 849 milioni o come circa 7 miliardi.

A volte si usa anche la scrittura: 6˙849˙000˙000. Sono usate anche:

- 6.849.000.000 (ma ciò si può fare solo se per separare parte intera e parte frazionaria di un numero si usa "," invece di "." : 1333 e 5 decimi → 1.333,5);
- 6,849,000,000 (ma ciò si può fare solo se per separare parte intera e parte frazionaria di un numero si usa "." invece di "," : 1333 e 5 decimi → 1,333.5).

***Nota 2***. A volte, considerando ad esempio il numero 857, non si dice che ha ordine di grandezza *delle centinaia* ma che ha ordine di grandezza *del migliaio* perché 857 è "vicino" a 1000. Analogamente del numero 9306 miliardi si può dire sia che ha ordine di grandezza *delle* migliaia di miliardi, sia che ha ordine di grandezza *della* decina di migliaia di miliardi (è vicino a 10000 miliardi).

**4** Una persona ha sostenuto le seguenti spese (in euro): 28.50, 1.25, 160.30, 0.50, 4.65. Per calcolare il totale batte sulla sua *calcolatrice tascabile* (o, in breve, CT):

2850 [+] 125 [+] 16030 [+] 50 [+] 465 [=]

Ottiene 19520. Quant'è la spesa totale? Perché la persona ha proceduto in questo modo, invece di battere:

28.50 [+] 1.25 [+] 160.30 [+] 0.50 [+] 4.65 [=] ?

**5** Completa quanto segue:

54300000 = _54.3_ milioni

1.1 milioni = _1100000_ ← *in cifre*

1 100 000 000 = ______ miliardi

436.2 miliardi = ________ ← *in cifre*

1250 = ______ migliaia

21.2 migliaia = _______ ← *in cifre*

41 610 000 000 000 = ______ decine di migliaia di miliardi

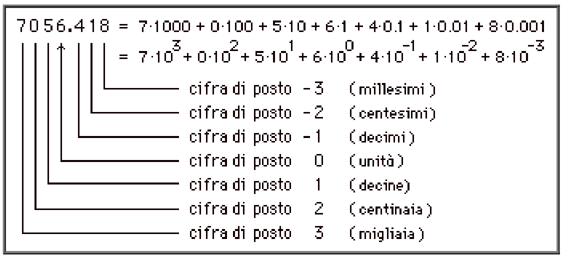
Se su una calcolatrice eseguo il calcolo di 12345678×12345678×12345678 sul visore compare (invece del risultato esatto 1881675960266558605752) 1.88167596 21 o 1.88167596**E**21 o 1.88167596**e**+21 o qualcosa di simile, per indicare il prodotto tra 1.88167596 e la potenza di 10 con **e**sponente 21, ossia $1.88167596\times10^{21}$.

Anche chi usa la CT può usare scritte analoghe per battere numeri che altrimenti non starebbero sul visore. Infatti in queste CT è presente un tasto [E] (a volte indicato con EXP o con EE o 𝔼). Ad esempio per calcolare 37 miliardi : 128 si può battere:

37 [E] 9 [÷] 128 [=]

Osservate il riquadro a fianco:

Esso ricorda che cosa si intende per ***posto di una cifra***.



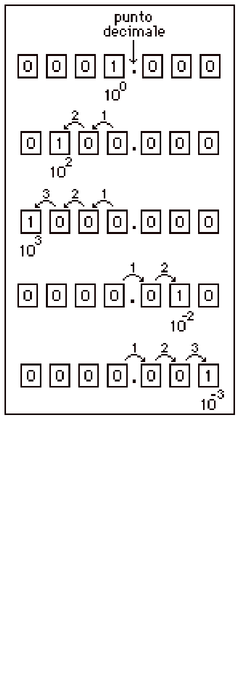

Ad esempio: 7 (cifra delle migliaia o di posto 3) indica quante volte deve essere preso 1000, cioè la potenza $10^3$; 8 (cifra dei millesimi o di posto –3) indica quante volte deve essere preso 0.001, cioè la potenza $10^{-3}$.

In altre parole una cifra ha posto $n$ se è spostata di $n$ posizioni (in avanti se $n>0$, indietro se $n<0$) rispetto a quella di ***posto 0***, cioè rispetto alla cifra delle unità.

Infatti in una *potenza di 10* l'esponente indica la posizione in cui va scritta la cifra "1":

$10^2$ per esteso diventa 100 (*2* posizioni *dopo* il posto 0),

$10^{-2}$ diventa 0.01 (*2* posizioni *prima* del posto 0).




Avanzare di 1 posto equivale a moltiplicare per 10, avanzare di 2 posti (cioè moltiplicare due volte per 10) equivale a moltiplicare per 100, …

Analogamente retrocedere di 1 posto equivale a dividere per 10, retrocedere di 2 posti (cioè dividere due volte per 10) equivale a dividere per 100, …

Quindi, come $10^n$ (dove $n$ può essere 1, 2, 3, 4, …, cioè un qualunque numero intero positivo) non è altro che il risultato della ripetizione della moltiplicazione per 10, così $10^{-n}$ non è altro che il risultato della ripetizione della divisione per 10:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | = $10^{-1}$ | = 1/10 | | = $10^1$ |
| 0.01 | = $10^{-2}$ | = 1/10/10 | = 1/100 | = $10^2$ |
| 0.001 | = $10^{-3}$ | = 1/10/10/10 | = 1/1000 | = $10^3$ |

$$\boxed{10^{-n} = \frac{1}{10^n}}$$

Oltre a quanto visto per le potenze di 10, abbiamo che:

$2^3$ sta per $2\cdot2\cdot2$ $7^4$ sta per $7\cdot7\cdot7\cdot7$ $x^2$ sta per $x\cdot x$

Più in generale la scrittura $\boldsymbol{a^n}$ ($n$ numero intero positivo) sta per $a{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}\ldots{\cdot}a$ dove $a$ compare $n$ volte ($a^1$ sta per $a$, $a^2$ sta per $a{\cdot}a$, $a^3$ sta per $a{\cdot}a{\cdot}a$, …).

Il risultato del calcolo di $a^n$ viene chiamato ***potenza*** $n$-esima ("ennesima") di $a$. L'operazione con cui a partire da $a$ e $n$ si ottiene $a^n$ viene detta *elevamento* di $a$ alla *potenza* $n$-esima. $a$ e $n$ vengono chiamati rispettivamente *base* ed *esponente* dell'elevamento.

**6** Completa, se possibile, quanto segue (prima osserva i due esempi):

$25 = 5^{\cdots}$ ? faccio: $1 \xrightarrow{\cdot 5} 5 \xrightarrow{\cdot 5} 25$; deduco che $25=5^2$

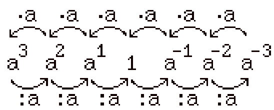
$186 = 6^{\cdots}$ ? faccio: $1 \xrightarrow{\cdot 6} 6 \xrightarrow{\cdot 6} 36 \xrightarrow{\cdot 6} 216$; deduco che non esiste $n$ tale che $186=6^n$

$16 = 4^{\cdots}$ $10 = 5^{\cdots}$ $81 = 9^{\cdots}$ $5 = 5^{\cdots}$ $16 = 2^{\cdots}$ $81 = 3^{\cdots}$ $27 = 9^{\cdots}$

Se $a$ è diverso da 0 si possono considerare anche le potenze di $a$ con esponente non positivo. Ad esempio $2^{-3}$ sta per 1/2/2/2.

Riassumendo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a^n$ | con $n > 0$ | è | 1 *moltiplicato* ripetutamente $n$ volte per $a$ |
| $a^n$ | con $n = 0$ | è | 1 |
| $a^{-n}$ | con $n < 0$ | è | 1 *diviso* ripetutamente $n$ volte per $a$ |




Generalizzando quanto visto per il numero 10, osserviamo che dividere ripetutamente $n$ volte per un numero $a$ equivale a dividere per $a^n$; quindi:

**(1.2)** $$\boxed{\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}}$$

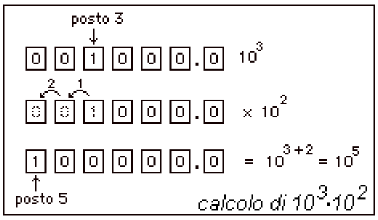
**7** **(A)** *Osserva:*

$0.111\ldots = 3^{\cdots}$ ? $1 \xrightarrow{/3} 0.333\ldots \xrightarrow{/3} 0.111\ldots$; quindi: $0.111\ldots = 1/3/3 = 3^{-2} = 1/3^2$

*Completa:*

$0.125 = 2^{\cdots}$ ? $1 \xrightarrow{/2} \ldots$

(**B**) Poiché $8=2^3$, 1/8 equivale a 1/2/2/2. *Spiega* come calcoleresti mentalmente 68/8 sfruttando questa idea.




**8** Utilizzando quanto suggerito dall'esempio a fianco completa i seguenti calcoli:

$10^6 \cdot 10^7 = \ldots$

$10^{-3} \cdot 10^9 = \ldots$

$10^{-2} \cdot 10^2 = \ldots$

**9** Utilizzando quanto suggerito dall'esempio a fianco completa:

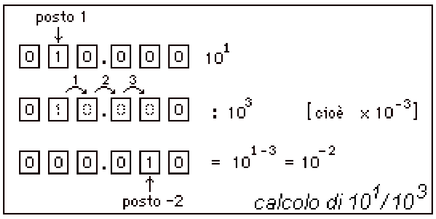
$10^6 / 10^4 = \ldots$

$10^6 \cdot 10^{-4} = \ldots$

$10 \cdot 10^{-5} = \ldots$

$10^2 \cdot 10^{-2} = \ldots$

$10^{-2} \cdot 10^{-5} = \ldots$




**10** Un grano di polline ha lo spessore di circa $10^{-5}$ m (0.00001 m, cioè 0.01 mm, pari a un centesimo di millimetro).

Il diametro della Terra è di circa $10^7$ m (cioè 10000 km, infatti $10000 = 10^4$, 1 km = $10^3$ m e $10^4{\cdot}10^3 = 10^{4+3} = 10^7$).

Quanti grani di polline occorrerebbe sovrapporre per ottenere una pila spessa come la Terra, cioè quante volte $10^{-5}$ m sta in $10^7$ m? (esprimi il risultato sia come potenza di dieci che a parole)

**11** Per rappresentare $10^{20}$ su una CT si può battere 1 [E] 20 (che sta per $1{\cdot}10^{20}$). Per rappresentare $10^{-5}$ occorre invece battere 1 [E] 5 [+/−]. Infatti per visualizzare –5 occorre battere 5 e poi cambiargli segno con l'apposito tasto. Utilizzando la CT controlla i calcoli del quesito 12.

Quanto visto nei quesiti 8 e 9 può essere riassunto nell'unica *formula* seguente (dove $m$ e $n$ rappresentano numeri interi qualunque, positivi o negativi o nulli):

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

Infatti ad esempio $10^6 \cdot 10^{-4} = 10^{6-4}$ può essere riscritta come $10^6 \cdot 10^{-4} = 10^{6+(-4)}$.

Anche $10^6/10^4$ può essere trasformato in $10^6{\cdot}10^{-4}$ e calcolato usando questa formula. Tuttavia può essere comodo ricorrere direttamente alla *formula*:

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

Ricordiamo che, più in generale, se $a$ è un qualunque numero positivo o negativo e $m$ e $n$ sono numeri interi (positivi o negativi o nulli), valgono le formule:

**(1.3)** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ **(1.4)** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\boxed{12}$ Se sostituisci a $m$ il numero 0 e poi esegui i calcoli che si possono fare, come si trasforma la formula (1.4)?

La scrittura di un numero nella forma $h \cdot 10^n$ ($37 \cdot 10^9$, $43.5 \cdot 10^{23}$,…) viene detta ***notazione esponenziale***.

Le CT esprimono i risultati che non stanno per esteso sul visore in una particolare forma esponenziale, detta ***notazione scientifica***, di cui abbiamo già visto un esempio: il numero 1881675960266558605752, la cui prima cifra ha posto 21, viene rappresentato come $1.88167596 \times 10^{21}$. Altri esempi:

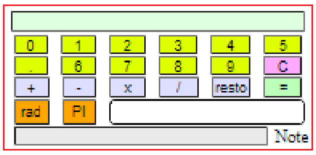
$\boxed{7412.5}$ ha ordine di grandezza delle migliaia; la prima cifra ha posto 3;
la sua rappresentazione in notazione scientifica è: $\boxed{7.4125 \cdot 10^3}$

$\boxed{0.000\ 001\ 305}$ la prima cifra diversa da 0 ha posto -6;
la sua rappresentazione in notazione scientifica è: $\boxed{1.305 \cdot 10^{-6}}$

In generale si tratta della notazione esponenziale $h \cdot 10^n$ che si ottiene prendendo come $n$ il *posto* della prima cifra diversa da zero del numero.

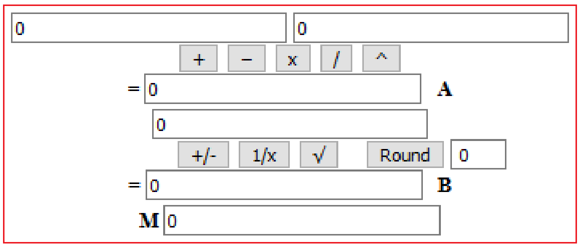
$h$ (che negli esempi precedenti è 4.161, 7.4125, 1.305) ha sempre una sola cifra (diversa da 0) a sinistra del punto decimale.

Invece di dire che 0.073 ($= 7.3 \cdot 10^{-2}$) ha ordine di grandezza dei centesimi, si può dire più in breve che ha ordine di grandezza –2. Cioè si può definire come ***ordine di grandezza*** di un numero l'esponente $n$ della sua scrittura in notazione scientifica.




Sui computer e su alcuni telefoni cellulari esitono calcolatrici che operano in modo un po' diverso. Incominciamo ad usare questa **piccola CT** semplicissima, raffigurata a lato. Con essa posso introdurre direttamente una o più operazioni: per eseguire 3/4 posso cliccare 3 [+] 4 [=] o, più semplicemente, battere 3+4 e cliccare [=]. I numeri "lunghi" se possibile vengono espressi in notazioni estesa. I numeri in notazione esponenziale, come $38 \cdot 10^3$, posso introdurli direttamente (38**e**3). Per calcolare il *reciproco* di 0.25 basta che batta 1/0.25 [=].

Ovvero posso usare questa **grande CT**, più simile ad un'usuale calcolatrice (a fianco ne puoi osservare una visione semplificata). Prova ad esaminarne l'help o gli esempi a cui si accede da esse (senza pretendere di capirne subito il significato). Prova quindi a calcolare il reciproco di 0.25 usando il minor numero possibile di tasti.




## 2. Rappresentazioni proporzionali, istogrammi

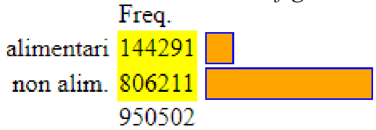
Torniamo alla ➔ tabella (1.1). Il confronto diretto tra dati relativi ad anni diversi non è facile: non è possibile paragonare il valore di 1 lira nel 1926 con quello di 1 euro nel 2010. Anche il *potere di acquisto* di 1 € ora è minore di quello che aveva nel 2010, o nel 2002, quando è entrato in vigore.

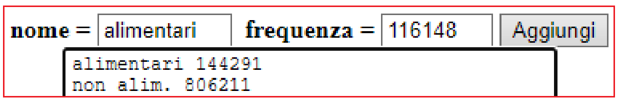
Non ha quindi senso confrontare direttamente le differenze di una singola voce di consumo da un anno all'altro, possiamo studiare come è cambiato il modo di spendere i soldi *esaminando come sono mutati i rapporti tra una voce di spesa e l'altra*.

Alcuni cambiamenti balzano all'occhio osservando la tabella. Ad esempio nel 1926 si spendeva circa la stessa cifra in tabacco e in trasporti, nel 2010 si spendeva molto più in trasporti. Altri confronti sono meno evidenti. Vedremo ora dei metodi di rappresentazione dei dati che ci faciliteranno questo studio.

L'***istogramma*** a destra rappresenta i consumi alimentari ($144291 \cdot 10^6$ €) e non alimentari ($806211 \cdot 10^6$ €) nel 2010. La figura puoi ottenerala con **questo script**: copi la riga seguente e la metti nel box in modo da evitare di battere i dati, quindi copi via via nelle rispettive caselle le voci e i numeri; batti ogni volta [Aggiungi]) e infine [Calcola]:
alimentari 144291 non alim. 806211

*figura 2*



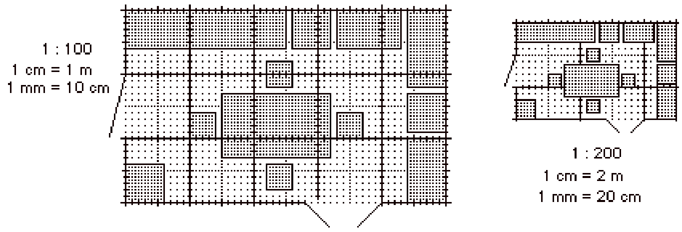

Il confronto tra le altezze dei due rettangoli ci dà subito un'idea visiva del rapporto tra i due consumi. Infatti *il rapporto tra le altezze dei rettangoli è uguale al rapporto tra i dati che esse rappresentano*.

Per comprendere meglio questo fatto facciamo riferimento alla *figura 3*, in cui sono raffigurate due diverse piantine su carta millimetrata della cucina di un appartamento. Le basi dei vari mobili sono state raffigurate tracciando lati con lunghezza pari alla lunghezza reale degli spigoli moltiplicata per la *scala*, cioè per il fattore di riduzione (vengono moltiplicate per 1/100, cioè divise per 100, in un caso, vengono moltiplicate per 1/200, cioè divise per 200, nell'altro).

Poiché tutte le distanze vengono moltiplicate per lo stesso fattore, i mobili *non* vengono rappresentati *sproporzionatamente*: sia in una piantina che nell'altra le basi dei mobili mantengono la forma che hanno nella realtà.

*figura 3*

(clicca per ingrandire)



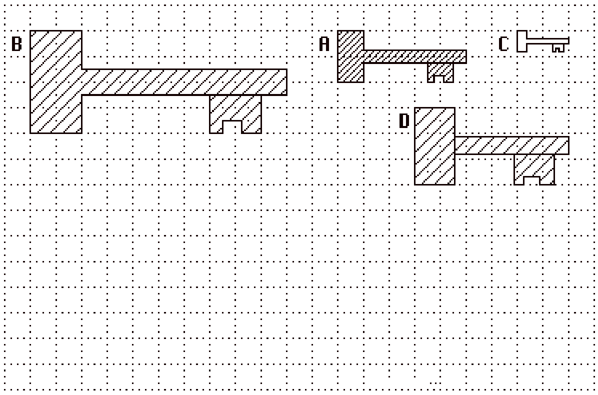

**13** Sotto è raffigurata in dimensioni reali (disegno A, con tratteggio fitto) la chiave di un piccolo armadietto. B e C sono due sue riproduzioni in scala: un ingrandimento e un rimpicciolimento.

(1) Qual è la scala di B, cioè per quale numero sono state moltiplicate le dimensioni reali per ottenere B?

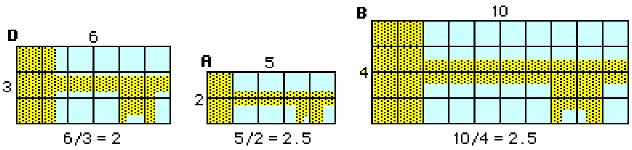
(2) Qual è la scala di C? (3) Disegna una riproduzione di A in scala 4.

(4) Il disegno D ti sembra una riproduzione proporzionata di A? Perché? Con quali misure e calcoli puoi confermare questa tua impressione?

*figura 4*




La chiave riprodotta in D appare più tozza rispetto a quella raffigurata in A: per essere proporzionata come A dovrebbe essere più lunga. Per tradurre questa impressione in termini quantitativi possiamo calcolare il rapporto tra lunghezza della chiave e altezza dell'impugnatura: nel caso A (vedi figura seguente) è 2.5, cioè la lunghezza è 2 volte e 1/2 l'altezza; nel caso D è 2, cioè la lunghezza è 2 volte l'altezza. Invece nel caso B abbiamo, come in A, il rapporto 2.5.




Invece di calcolare 10/4 e trovare che il risultato è 2.5 come nel caso di 5/2, potevamo osservare direttamente che il rapporto 10/4 è uguale al rapporto 5/2. Infatti:

$$\frac{10}{4} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{5}{2}$$

La scrittura $\frac{5 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}}$ sta a indicare che $\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}$ può essere "semplificato" e trasformato in $\frac{5}{2}$

Procediamo analogamente quando per fare 600/40 ci riconduciamo al calcolo di 30/2:

$$\frac{600}{40} = \frac{60 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{60 \cdot \cancel{10}}{4 \cdot \cancel{10}} = \frac{60}{4} = \frac{30 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{30 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{30}{2}$$

In pratica utilizziamo il fatto che:

> *se i termini di una divisione vengono entrambi moltiplicati – o entrambi divisi – per uno stesso numero (diverso da 0) il risultato non cambia.*

Questa è la traduzione numerica di quanto abbiamo osservato a proposito delle riproduzioni in scala:

> *se le dimensioni di un oggetto* (i due lati del tavolo o la lunghezza e l'altezza della chiave o …) *vengono moltiplicate per la stessa scala, il rapporto tra tali dimensioni non viene modificato*.

Più in generale ogni volta che si moltiplica un insieme di dati per un fattore fissato si ottiene una rappresentazione *proporzionale* dei dati di partenza, cioè tale che il rapporto tra una coppia qualunque dei nuovi valori è uguale al rapporto tra la coppia dei valori originali. Per questo motivo una relazione del tipo:

**(2.1)** $(grandezza2) = (grandezza1) \cdot \mathrm{k}$

dove k è un numero (diverso da 0) fissato, viene detta relazione di ***proporzionalità***.

Il numero k viene detto ***fattore di proporzionalità***. Nel caso particolare delle scale, se k>1 si parla di fattore (o scala) di *ingrandimento*, se 0<k<1 di fattore di *riduzione*.

**14** Completa le seguente tabella, relativa a quattro diverse rappresentazioni proporzionali [figure: ➜ 3, ➜ 4, ➜ 2]

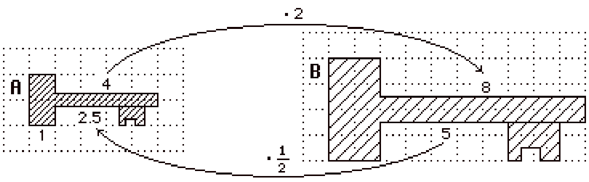
| | *grandezza1* | *grandezza2* | *k* |
|---|---|---|---|
| fig.3 a sinistra | distanza reale | distanza nella pianta | |
| fig.3 a destra | distanza reale | distanza nella pianta | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| figura 4 | distanza in A | | 2 |
| figura 2 | valore monetario (in miliardi di €) | | 1/50 |

Anche nel caso della tabella ➔ (1.1) abbiamo una rappresentazione proporzionale: i dati reali sono stati rappresentati in milioni, cioè sono stati divisi per 1 milione, ossia moltiplicati per $1/10^6$ ($= 10^{-6}$).

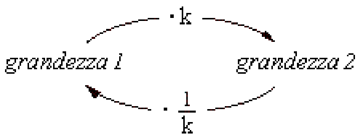
Anche le relazioni inverse sono relazioni di proporzionalità.   Ad esempio, riferendosi alla ➔ figura 4,

oltre a:   *distanza in B* = (*distanza in A*) · 2
anche:   *distanza in B* = (*distanza in A*) · $\frac{1}{2}$   è del tipo ➔ (2.1)




passando da A a B un tratto lungo 4 viene trasformato in un tratto lungo 4·2; passando da B a A un tratto lungo 5 viene trasformato in un tratto lungo 5·(1/2)

Generalizzando:

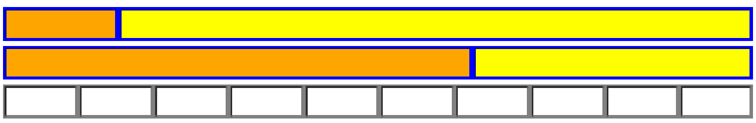



15   Se sulla CT (quella "piccola" considerata alla ➔ fine del paragrafo 1) batti  1/(1/8)  (e poi "=")  che cosa ottieni?  …   Descrivi questo fatto completando la frase:
Il reciproco del .................................. di 8 è 8.

### 3. *Rappresentazioni percentuali, approssimazioni*

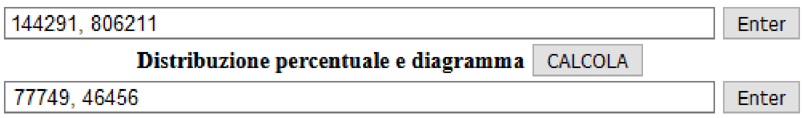
A questo punto ci pare chiaro che per confrontare, ad esempio, consumi alimentari e non alimentari nel 1926 e nel 2010 ci conviene trasformare i dati in modo proporzionale, in modo che il totale riferito ai due anni sia rappresentato in modo uguale. Un esempio:

```
2010, alimentari 144291   non alimentari 806211
                 15.181%                 84.819%
1926, alimentari 77749    non alimentari 46456
                 62.597%                 37.403%
```

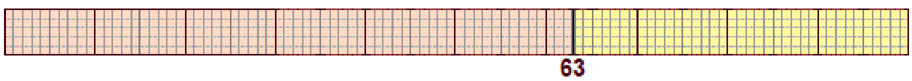


Anche senza leggere i dati, dalla figura capiamo subito che i consumi non alimentari nel 1926 erano meno di 4/10 (40%) mentre nel 2010 erano più di 8/10 (80%).

Prima di riflettere su questa rappresentazione, vediamo come ottenerla facilmente con **questo script**:




Invece che rappresentare le quantità con rettangoli con la stessa base li abbiamo rappresentati con rettangoli consecutivi, con un cosiddetto ***diagramma a striscia***.  Avremmo potuto rappresentare tutto a mano, su una striscia di carta millimetrata lunga 100 mm, suddividendola nel caso del 1926, in una parte lunga 63 mm e una lunga 37 mm. Vedremo tra poco come ottenere "a mano" 63 e 37.



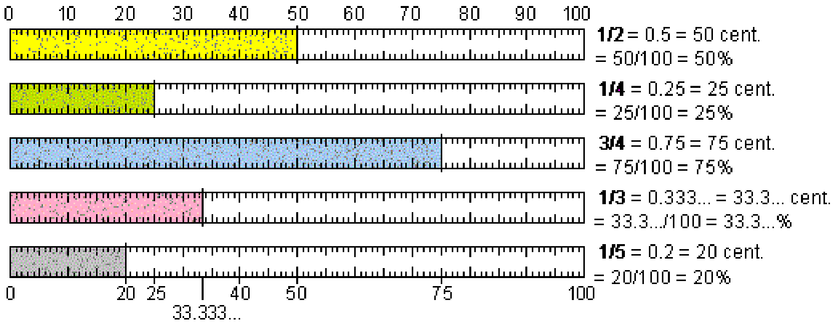

Perché la scelta di rappresentare il totale dei consumi con 100 quadrettini?

Perché è *comoda*. Infatti da una parte, come vedremo fra poco, la scelta del numero 100 facilita i calcoli. Dall'altra i dati sono rappresentati da numeri (di quadrettini) compresi tra 0 e 100, facili da ricordare e, per l'abitudine che abbiamo ad usare sistemi di misura decimali (ad esprimere mezzo metro come 50 cm, un quarto di etto come 25 grammi, un terzo di litro come 33 cl, …), facili da confrontare tra loro e con il totale (100).

Possiamo addirittura fare a meno del diagramma: una volta che sappiamo che nel 1926 i consumi alimentari erano 63 centesimi del totale, riusciamo a immaginarci una striscia lunga 100 e una sua parte lunga 63.

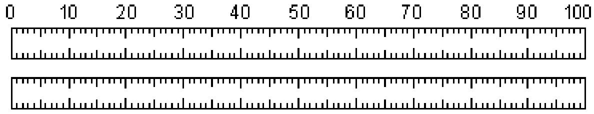
Se invece del modello grafico si usa solo la rappresentazione delle parti sotto forma di *centesimi* del totale, si parla di rappresentazione in ***parti percentuali*** (o semplicemente *percentuali*).  Questa espressione deriva dal fatto che al posto dell'espressione «63 centesimi» (63/100) si usa spesso l'espressione «63 *per cento*», scritta in genere così: *63%*.

Il disegno seguente richiama e mette in relazione diversi modi di esprimere i rapporti.

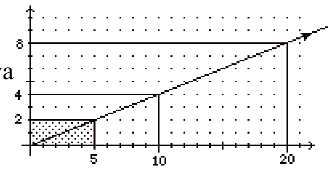



**16** Come suggerisce il disegno precedente, per rappresentare il rapporto tra 2 e 5 su una striscia graduata puoi procedere in due modi:
(1) dividere la striscia in quinti, cioè in 5 parti uguali, e prenderne 2; oppure:
(2) calcolare 2/5, esprimere il risultato in centesimi e considerare una quantità di segmentini pari al numero di centesimi così trovato

Procedi in entrambi i modi sulle due strisce riportate qui sotto.




*Come sono state calcolate le percentuali*?



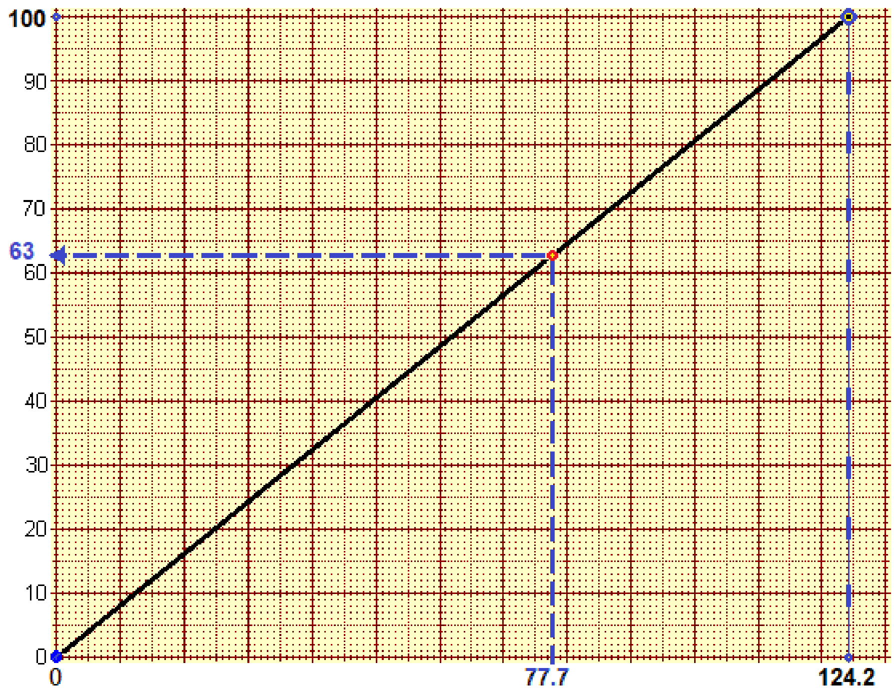

Ricordiamo (➔ *La matematica e i suoi modelli*, scheda 2) che il legame tra due grandezze proporzionali è rappresentato graficamente da una retta passante per il punto (0,0): un punto che si muova sulla retta conserva inalterato il rapporto tra coordinata verticale e coordinata orizzontale.

Da ciò segue la possibilità di calcolare le percentuali con un ***metodo grafico***.

Vediamo in dettaglio il procedimento da impiegare e, a destra, la sua esemplificazione riferita a ➔ figura 5: come si è trovata la percentuale dei consumi alimentari nel 1927, cioè il rapporto tra il *dato* 77 mila 749 e il *totale* 124 mila 205 (milioni di lire).

- *scegliamo opportune "scale" in modo da rappresentare facilmente sull'asse orizzontale i dati e sull'asse verticale le relative percentuali;*
- *tracciamo la retta che congiunge (0,0) e (*totale*,100), cioè (124.2,100);*
- *per il* dato *77.7 individuiamo il punto di questa retta che ha come ascissa 77.7;*
- *l'ordinata di questo punto, 63, è la* percentuale *cercata.*

*figura 5*




**17** Procedi analogamente per trovare la percentuale costituita dai consumi riportati sotto la voce "altro" (15.3… miliardi). ........%

Come possiamo procedere con un ***metodo numerico***? In due modi:

- esprimere in forma percentuale il rapporto tra il dato e il totale:

**(3.1)** $$percentuale = \frac{dato}{totale} \cdot 100$$

oppure

- moltiplicare il dato per il fattore di proporzionalità (rapporto tra nuovi valori e valori originali):

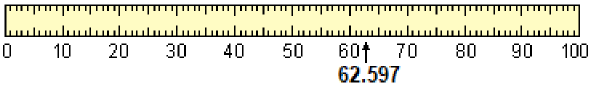
**(3.2)** $$percentuale = dato \cdot \frac{100}{totale}$$

E` evidente che (3.1) e (3.2) sono equivalenti: moltiplicando per 100 prima della divisione per *totale* o dopo di essa si ottiene comunque lo stesso numero.

**18** Utilizzando (3.1) o (3.2) calcola la percentuale relativa al 2010 ottenuta con lo script all'inizio del paragrafo e riportala così come è visualizzata dalla CT. Scrivi anche quali valori hai *sostituito* alle *variabili* presenti nella formula.
*dato* ← ..... *totale* ← ..... *percentuale* visualizzata dalla CT: .....

Analogamente, con una delle CT considerate (ad es. quella **piccola**), si può procedere analogamente per trovare le percentuali relative al 1926.
Introducendo 77749 / 124205 * 100 e 46456 / 124205 * 100 si ottengono: 62.59731894851254, 37.402681051487455.

Il numero 62.597… nel diagramma a striscia precedente lo abbiamo approssimato con 63. Lo avremmo potuto approssimare con 62?

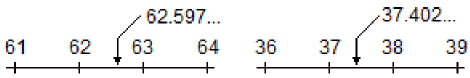



Possiamo scegliere tra una approssimazione:

– per ***troncamento***, cioè togliere tutte le cifre successive al posto degli interi (ossia tutte le cifre dopo il punto decimale), ottenendo 62, o:

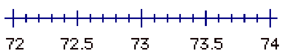
– ***al numero più vicino***, cioè prendere l'intero più vicino a 62.597…, ottenendo 63; questo secondo procedimento viene di solito chiamato ***arrotondamento***.

Se (come abbiamo fatto usando il metodo grafico) tra le tacche di separazione tra un quadrettino e il successivo vogliamo prendere quella più vicina al punto che rappresenterebbe esattamente il dato dobbiamo procedere per *arrotondamento*, e quindi prendere 63. Procediamo analogamente per 37.402…; otteniamo 37, ma in questo caso avremmo ottenuto lo stesso valore se avessimo proceduto per troncamento.




*Nota*. Molti impiegano la parola arrotondamento per indicare una qualunque approssimazione con un numero inferiore di cifre; noi nel seguito useremo in genere la parola "arrotondamento" nel significato di "approssimazione al numero più vicino".

**19** In quali casi troncando e arrotondando alle unità si ottiene lo stesso numero intero? Completa la tabella seguente. Quindi evidenzia sul disegno sottostante l'intervallo dei numeri che vengono arrotondati a 73 ed evidenzia diversamente quello dei numeri che vengono troncati. L'intersezione tra i due intervalli è l'intervallo dei numeri cercati.

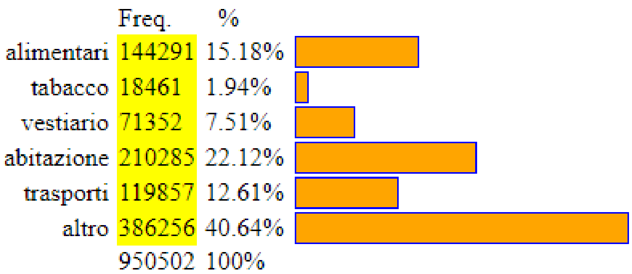


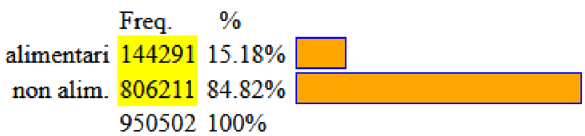

| numero | arrotondamento | troncamento |
|---|---|---|
| 72.03 | | |
| 72.41 | | |
| 72.53 | | |
| 72.64 | | |
| 72.72 | | |
| 72.91 | | |
| 73.09 | | |
| 73.41 | | |
| 73.56 | | |

Una *regola per eseguire gli arrotondamenti alle unità* è dunque la seguente:

– se la cifra di posto inferiore a quello delle unità (cioè se la cifra dei decimi) è
0, 1, 2 ,3 o 4 si prende il numero troncato alle unità,
– se è 5, 6, 7, 8 o 9 si prende il numero troncato alle unità e aumentato di uno

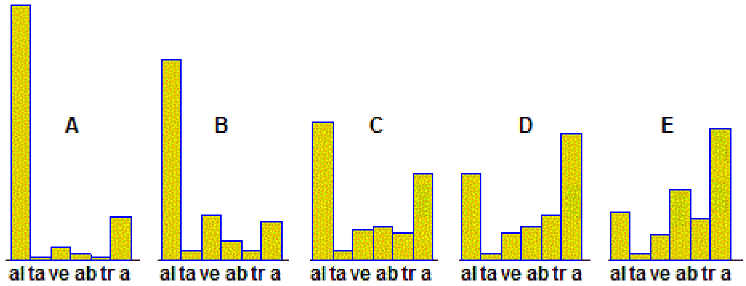
Analogamente a come abbiamo fatto per i consumi alimentari e non, possiamo rappresentare mediante istogramma le varie voci di consumo presenti nella tabella ➜ (1.1). Ecco la rappresentazione relativa al 2010 (affiancata a quella per i consumi alimentari e non).




Abbiamo affidato i calcoli ad un **altro script**, in cui introduciamo i dati: `alimentari 144291 tabacco 18461 vestiario 71352 abitazione 210285 trasporti 119857 altro 386256`

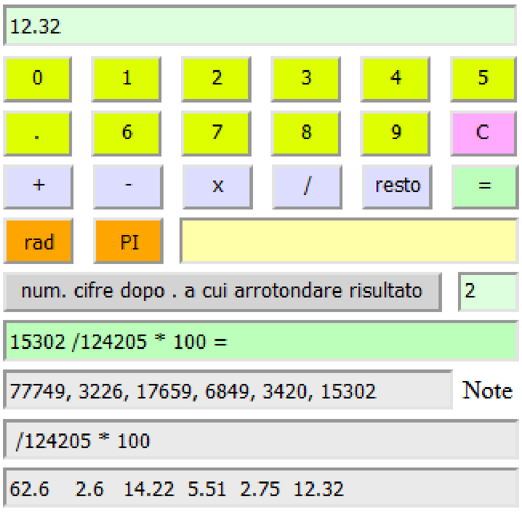
**20** Individua quale, tra i seguenti istogrammi, rappresenta i consumi nel 1926. Non essendo stati riportati i valori numerici devi trovare la soluzione procedendo per esclusione.
Motiva la tua risposta (l'istogramma … *non va bene perché* … ; l'istogramma … non va bene perché … ; …).




Abbiamo calcolato le distribuzioni percentuali utilizzando script che "facevano tutto". Vediamo come gestire direttamente i calcoli impiegando la "piccola" **CT** introdotta alla fine di §1. Usiamo le formule ➔ (3.1) o (3.2), per il **1926**:

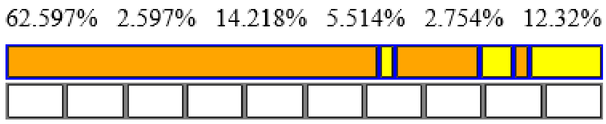
– *totale* è 124205,
– *dato* assume man mano i valori: 77749, 3226, 17659, 6849, 3420, 15302.

Copiamo una volta per tutte questi valori nella prima riga delle "Note" e copiamo nella seconda riga il calcolo "/ 124205 * 100" che dobbiamo ripetere più volte e che poi, per risparmiare tempo (e per ridurre la probabilità di premere dei tasti sbagliati), utilizzeremo usando il copia/incolla del computer:

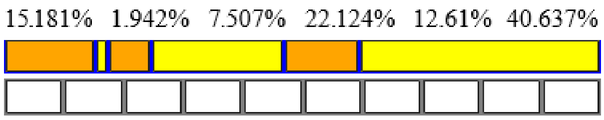



- Metto 2 come "numero delle cifre dopo "**.**" a cui arrotondare il risulato (se voglio solo 2 cifre decimali)
- Copio e incollo 77749 nella prima casella verde e copio e incollo alla sua destra "/ 124205 * 100", il calcolo che devo ripetere più volte; poi clicco [=]. Ottengo 62.60 (ma l'ultimo 0 non viene visualizzato), che copio, ad esempio, nella successiva casella grigia.
- Copio e incollo 3226 nella prima casella verde e copio e incollo alla sua destra "/ 124205 * 100"; poi clicco [=]. Ottengo 2.60 che copio dopo il risultato precedente.
- E così via.
- Alla fine ho i valori: 62.60, 2.60, 14.22, 5.51, 2.75, 12.32.

Per fare un po' più velocemente il calcolo sarei potuto ricorrere allo script considerato all'inizio di §3, introducendo i dati separati da virgola (77749, 3226, 17659, 6849, 3420, 15302):




**21** Se tracci gli istogrammi relativi al 1926 e al 2010, o se confronti i relativi diagrammi a sctriscia (qua sotto è riprodotto quello relativo al 2010 (144291, 18461, 71352, 210285, 119857, 386256), puoi notare come sia cambiata l'incidenza di ciascuna voce sul totale. Individuate per quali voci tale incidenza è aumentata, per quali è diminuita, per quali questi cambiamenti sono stati maggiori, …. Quali osservazioni potete fare, di conseguenza, sui cambiamenti nelle condizioni di vita? Quali consumi pensate siano compresi sotto la voce "*altro*"?




**22** Nel 1989 in Italia un abitante ha consumato mediamente 26.3 kg di carne bovina, 26.5 kg di carne suina, 30.3 kg di carne di altro tipo (pollo, agnello, pesce,…); nel 1969 gli stessi consumi sono stati, rispettivamente, di 23.5, 9.3 e 17.5 kg. Per entrambi gli anni, calcola la distribuzione percentuale del consumo di carne e tracciane l'istogramma.

**23** Calcola la somma delle percentuali arrotondate agli interi delle voci dei consumi del 2010 considerate nel quesito 21 (15, 2, 8, 22, 13, 41) fa 100%? Trovate una spiegazione per questa "stranezza" del risultato e scrivetela in forma sintetica qua sotto.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

CONTINUA ➔